70

(1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} f(x) &= \lim_{x\to+0}\frac{x+2\sin\left(a^2x\right)}{\sin(ax)} \\
&= a\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{x+2\sin\left(a^2x\right)}{a^2x}}{\dfrac{\sin(ax)}{ax}} \\
&= a\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{a^2}+2\cdot\dfrac{\sin\left(a^2x\right)}{a^2x}}{\dfrac{\sin(ax)}{ax}} \\
&= a\cdot\frac{\dfrac{1}{a^2}+2}{1} \\
&= \frac{1}{a}+2a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} f(x) &= \lim_{x\to+0}\frac{x+2\sin\left(a^2x\right)}{\sin(ax)} \\
&= \lim_{x\to+0}\left\{\frac{x}{\sin(ax)}+2\cdot\frac{\sin\left(a^2x\right)}{\sin(ax)}\right\} \\
&= \lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{a}\cdot\frac{ax}{\sin(ax)}+2a\cdot\frac{ax}{\sin(ax)}\cdot\frac{\sin\left(a^2x\right)}{a^2x}\right\} \\
&= \frac{1}{a}\cdot 1+2a\cdot 1\cdot 1 \\
&= \frac{1}{a}+2a
\end{aligned}
$$

など

(2)

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{x+b}-c}{x} \quad \cdots ①$$

分母の極限値が 0 だから，分子の極限値も 0 であることが必要。

よって， $\lim_{x\to -0} \sqrt{x+b}-c = \sqrt{b}-c = 0$ より，必要条件は $c=\sqrt{b} \quad \cdots ②$

②を①に代入すると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -0} f(x) &= \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{x+b}-c}{x} \\ &= \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x} \\ &= \lim_{x\to -0} \frac{\left(\sqrt{x+b}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{x\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)} \\ &= \lim_{x\to -0} \frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b}}\end{aligned}$$

よって，②のとき極限値 $\lim_{x\to -0} f(x)$ が存在する。

ゆえに， $c=\sqrt{b}$ は極限値 $\lim_{x\to -0} f(x)$ が存在するための必要十分条件である。

以上より，

極限値 $\lim_{x\to -0} f(x)$ が存在するための $b,\ c$ の条件は $c=\sqrt{b}$

また，このとき $\lim_{x\to -0} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$

(3)

a と $f(0)$ の値

$x=0$ で連続になるための必要十分条件は $f(0) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x)$

すなわち，(1)，(2)および $b=\dfrac{1}{32}$ より， $f(0) = \dfrac{1}{a}+2a = 2\sqrt{2} \qquad \therefore f(0) = 2\sqrt{2}$

また， $\dfrac{1}{a}+2a-2\sqrt{2}=0$ すなわち $\dfrac{\left(\sqrt{2}a-1\right)^2}{a}=0$ より， $\sqrt{2}a-1=0 \qquad \therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$b>\dfrac{1}{32}$ のとき $f(x)$ が $x=0$ で連続になることはない理由

解法 1

$x=0$ で連続のとき $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$ すなわち $\dfrac{1}{a}+2a=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ が成り立つ。

ところが，$b>\dfrac{1}{32}$ のとき

$a>0$ だから，相加平均≥相乗平均より，$\dfrac{1}{a}+2a\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot 2a}=2\sqrt{2}$ ・・・①

$2\sqrt{b}>2\sqrt{\dfrac{1}{32}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ $\therefore \dfrac{1}{2\sqrt{b}}<2\sqrt{2}$ ・・・②

よって，①，②より，$\dfrac{1}{a}+2a>\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ となり，

$\dfrac{1}{a}+2a=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ すなわち $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$ が成り立たない。

ゆえに，$b>\dfrac{1}{32}$ のとき，$f(x)$ が $x=0$ で連続になることはない。

解法 2

$x=0$ で連続のとき $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$

すなわち $\dfrac{1}{a}+2a=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ を満たす正の実数 $a,\ b$ が存在する。

このとき，

$\dfrac{1}{a}+2a-\dfrac{1}{2\sqrt{b}}=0$，$\dfrac{1}{a}+2a-\dfrac{1}{2\sqrt{b}}=\dfrac{1}{a}\left(2a^2-\dfrac{1}{2\sqrt{b}}a+1\right)$ より，

$\dfrac{1}{a}\left(2a^2-\dfrac{1}{2\sqrt{b}}a+1\right)=0$

よって，$2a^2-\dfrac{1}{2\sqrt{b}}a+1=0$

これを a の 2 次方程式とみると，その解は実数だから，

判別式を D とすると，$D=\dfrac{1}{4b}-8=-\dfrac{32b-1}{b}\geq 0$ より，$b(32b-1)\leq 0$

$b>\dfrac{1}{32}$ はこれを満たさないから不適である。

よって，$b>\dfrac{1}{32}$ のとき，$f(x)$ が $x=0$ で連続になることはない。